525

A. A. HIDDINK

leraar pedagogiek
Rijkskweekschool, Hengelo (O.)

SCHEMATISCHE ORIËNTERING IN HET VAK REKENEN OP DE LAGERE SCHOOL

2e druk

in opdracht van de
STICHTING ONDERWIJS ORIËNTATIE
in 1964
uitgegeven door de uitgevers:
J. M. MEULENHOFF / J. MUUSSES / ERVEN P. NOORDHOFF
NIJGH & VAN DITMAR / SPRUYT, VAN MANTGEM EN DE DOES

besteladres: postbus 39, Groningen

6 *HET TOEGEPASTE REKENEN*

Bij het rekenonderwijs gaat het uiteindelijk om het oplossen van problemen van kwantitatieve aard. Dit houdt in, dat we de leerlingen voor rekenprobleempjes moeten stellen. De beste problemen zijn o.i. die (tijdens welke les dan ook) in de klas zelf ontstaan. Er is dan een sterk motief aanwezig deze tot oplossing te brengen. Bij pogingen daartoe stellen we de leerlingen volop in de gelegenheid kwantitatieve gegevens te ontdekken en relaties ertussen te „zien", waarna de nodige bewerkingen kunnen worden gekozen en uitgevoerd.

Om de bewerkingen te kunnen uitvoeren, moeten de leerlingen dus de beschikking hebben over een zekere parate kennis, die wij in de vorige hoofdstukken aan de orde hebben gesteld.
Zoals nl. de timmerman uit zijn gereedschapskist dàt gereedschap kiest, dat hij op een bepaald ogenblik nodig heeft voor zijn werkzaamheden, zo moeten de leerlingen „gereedliggende" procédé's tot hun beschikking hebben om bewerkingen, wanneer deze eenmaal zijn gekozen, vlot te kunnen uitvoeren.
Rekentechnieken en rekenregels eisen zonder twijfel een speciale behandeling, doch krijgen alleen betekenis wanneer ze betrokken worden op rekenproblemen.

In het geheel van het rekenonderwijs moet o.i. het rekenvraagstuk een belangrijke plaats innemen.
We hebben zojuist genoemd: rekenproblemen en rekenvraagstukken, welke benamingen in het algemeen vrij willekeurig door elkaar gebezigd worden.
Wij bedoelen met deze termen: Een kwantitatieve situatie eventueel in woorden beschreven, waaraan een bepaalde vraag verbonden wordt of kan worden en waarbij de rekenkundige bewerking(en) zelf moet(en) worden gekozen en uitgevoerd.
Toch lijkt het ons gewenst bewust onderscheid te gaan maken tussen rekenproblemen en rekenvraagstukjes.

Bij rekenproblemen moeten wij o.i. denken aan vraagstukjes, die ontstaan tijdens de behandeling van een aardrijkskundeles bijv., wanneer we op de bevolkingsdichtheid terecht komen. Hier staan we a.h.w. plotseling voor een probleem van kwantitatieve aard, een rekenprobleem. Hoe kunnen we de bevolkingsdichtheid van een land bepalen? Over welke gegevens moeten we daarvoor beschikken? Hier moeten gegevens opgespoord worden, welke nodig zijn om de gestelde vraag te beantwoorden. Vergelijk de bevolkingsdichtheid van ons land met die van Canada, etc. De klas tracht een oplossing te vinden. Er komen suggesties uit de klas, welke door de overige leerlingen òf aanvaard òf verworpen, in elk geval kritisch bekeken worden (groupthinking). Vanuit het begrip bevolkingsdichtheid komt men gemakkelijk op emigratie en immigratie, waarvan de kwantitatieve zijde weer nieuwe problemen doet opduiken.
In dergelijke gevallen is een sterk motief aanwezig oplossingen te vinden (motivering van de leerstof).
„A situation presents a problem only when one must give a response (that is, when he seeks satisfaction) and has no habitual response which will give satisfaction". [1])
De schrijver stelt, dat een probleem een onvoldaan gevoel, een innerlijke spanning dus, opwekt. Men kan zich van dit onbevredigende gevoel bevrijden door het probleem tot een „bevredigende" oplossing te brengen. Een tweede kenmerk is, dat men de oplossing niet kan geven door gewoontehandelingen (toepassing van aangeleerde „oplossingsmethoden"). Er wordt denkarbeid gevraagd: opsporen van gegevens, ordenen van gegevens, zoeken van relaties, trekken van conclusies, keuze van de nodige bewerkingen. Alleen het mechanisch uitvoeren van bewerkingen berust op gewoontehandelingen.

Bij rekenvraagstukjes denken we onwillekeurig aan de reken-

[1]) G. T. Buswell, „Arithmetic" 1948, Ch. IV. L. J. Cronbach „The meaning of problems", pag. 32.

opgaven, welke in onze rekenboekjes voorkomen. Deze zijn vaak bedoeld als toepassing van wat te voren behandeld en geleerd werd. Deze vraagstukjes staan vaak op zichzelf.
De bakker, die zoveel broden verkoopt; de timmerman, die een plank van zekere lengte in zoveel gelijke delen moet zagen; de boer, die schapen en koeien verhandelt; Pietje, die knikkers wint en verliest; de onderwijzer, die zoveel % van zijn voorraad pennen uitdeelt en dan gaat uitrekenen hoeveel kinderen hij in zijn klas heeft . . . alles op een en dezelfde bladzijde van het rekenboek!

Zijn deze traditionele rekenopgaven voor de kinderen werkelijk problemen? Hebben de kinderen er voldoende belangstelling voor ze tot „bevredigende" oplossing te brengen? Veroorzaken ze werkelijk de nodige innerlijke spanning? Of gaat het er om ze maar af te hebben, zonder zich te bekommeren om de kwaliteit van het antwoord?

We kunnen ons er van overtuigd houden, dat er een aanzienlijk aantal kinderen is, dat wel een „onbevredigd" gevoel krijgt, doch niet in de zin zoals Cronbach bedoelde, maar zoals een dichter het ons vertelde in „die nare sommen, wat verdriet".
Het oplossen van bedoelde vraagstukjes eist van de kinderen zich in de gegeven situatie in te leven, om daarna over die situatie na te denken. Vooral de zwakke intelligenties hebben hier moeite mee, doordat de situatie steeds verandert, waardoor telkens nieuwe instelling en aanpassing wordt vereist. Wij wijten dan ook het slechte resultaat t.a.v. het oplossen van deze vraagstukjes ten dele aan het feit, dat de situatie te vaak wisselt. Kinderen, die hier telkens falen, zullen zeker een negatieve houding aannemen, en steeds minder in staat zijn een goede oplossing te geven. „Fear narrowed their mental fields". [1]) Ze raken bij voorbaat reeds in de war wanneer ze voor het oplossen van een vraagstukje geplaatst worden. *Wanneer we kinderen bij herhaling voor te moeilijke rekenopgaven plaatsen is het pedagogisch effect geheel negatief.* Een aantal kinderen ondergaat dit lot onvermijdelijk, mits we er in slagen de rekenvraagstukjes in voldoende mate te differentiëren.

[1]) G. T. Buswell, „Arithmetic" 1948. Ch. IV. L. J. Cronbach: „The meaning of problems", pag. 33.

Uit deze beschouwing blijkt duidelijk, dat we de voorkeur moeten geven aan rekenproblemen. We zagen, dat het ontstaan van deze problemen gebonden is aan een of andere les, belangstellingscentrum, leerstofkern of project. Het probleem duikt plotseling op, er zit iets onverwachts, iets spontaans in en kan rekenen op voldoende belangstelling van de zijde der kinderen.

We betwijfelen echter, of in onze huidige lagere school, waar in het algemeen weinig of in het geheel niet met belangstellingscentra, leerstofkernen of projecten gewerkt wordt, de nodige rekenproblemen „ontstaan".

Ons streven zal moeten zijn de traditionele rekenvraagstukjes voor een groot deel te vervangen door rekenproblemen. We zullen het echter o.i. voorshands nog moeten stellen met rekenvraagstukjes, hoewel we zonder uitgebreid onderzoek niet kunnen nagaan, in hoeverre het oplossen ervan een grotere geschiktheid geeft voor het oplossen van rekenproblemen in de zin, die wij er aan gegeven hebben.
We zullen trachten een analyse te geven van het rekenvraagstukje.
Het rekenvraagstukje, zoals we dit kennen uit de gangbare rekenmethoden bestaat meestal uit enkele zinnen, die een probleem bevatten, dat rekenkundig moet worden opgelost. De laatste zin is een vraag of heeft het karakter van een vraag.
Jan gaat naar de bakker en haalt 2 broden à 41 ct.
Hoeveel moet hij betalen?
of: Hij moet . . . . . betalen.

Het karakteristieke van dergelijke vraagstukjes is:
1e. dat getracht wordt een bepaalde situatie te suggereren, waarin gerekend kan worden.

2e. dat de denkrichting, om tot de oplossing te komen, bepaald wordt door de gestelde vraag.
3e. dat het steeds precies het aantal gegevens bevat, dat voor de oplossing ervan nodig is.
4e. dat er meestal één weg gevolgd kan worden om de juiste oplossing te krijgen.

Om een vraagstukje te kunnen oplossen moet het kind dit niet alleen kunnen lezen, doch zich ook enigszins in de bedoelde situatie kunnen „inleven". Waterink [2]) noemt als een der struktuurdelen van de intelligentie: het vermogen tot situatiebeoordeling, het inzicht in de situatie.

Het kind moet de situatie kunnen ontwarren en zal daarbij steeds de vraag als richtinggevende factor bewust moeten houden. Heeft het de verlangde „relaties" gezien, dan moet het kind een keuze doen uit de hoofdbewerkingen. Deze keuze is het resultaat van het al denkend verwerken van de opgave. De uitwerking is een kwestie van technische beheersing van deze hoofdbewerking. Verder is belangrijk, dat het de uitkomst kritisch bekijkt, in de zin van: „Is dit antwoord mogelijk?"
Bijv. Jan loopt in een uur 5 m, moet t.a.v. de juistheid argwaan wekken.

De oplossing van een rekenvraagstukje, waarbij dus ook de berekening (het uitwerken van de gekozen hoofdbewerkingen) behoort, is gebonden aan een zekere graad van geestelijke rijpheid en ontwikkeling. Er moet bij de leerling een zekere mate van scherpzinnigheid en opmerkingsgave aanwezig zijn. Belangstelling voor het probleem en de daaraan verbonden uitwerking van het zuivere rekenwerk is noodzakelijk, wil de nodige concontratie, de spanning, gedurende de gehele procedure aanwezig blijven. Elke inzinking kan noodlottig zijn, daar bij dit rekenwerk de vele schakels zuiver in elkaar moeten grijpen om de

[1]) J. Waterink: Thearie der opvoeding, 1951, pag. 228/242.

juiste uitkomst te verkrijgen. *Rekenwerk is nu eenmaal precisiewerk en dit precisiewerk stelt vooral hoge eisen aan de concentratie. We zijn dan ook van mening, dat menig foutief antwoord eerder te wijten is aan een gebrekkige concentratie op een zeker ogenblik, dan aan een reëel onvermogen tot het leveren van een juiste uitkomst.* Vandaar dat sommige leerlingen vaak afwisselend goed en slecht rekenwerk maken, hoewel dit werk van gelijke moeilijkheidsgraad is.
Seemann [1]) zegt hierover het volgende:

„Gerade die eingehende analyse der Rechenfehler führt uns mit immer eindringlicher Deutlichkeit vor Augen, dasz es sich auch bei den einfachsten Rechenlösungen um einen komplizierten seelischen Vorgang handelt, den wir als Willens- und Denkakt mit anschaulichen Begleitungselemente charakterisieren können".

Thans gaan wij over tot het vermelden van de resultaten van enkele *steekproeven* in verband met het toegepaste rekenen, waarbij wij iets aan het licht hopen te brengen, omtrent de wijze, waarop diverse klassen en leerlingen op enkele vraagstukjes reageerden.

Proef 1. Het zogenaamde vraagloze vraagstukje. [2])
Dit „vraagstukje" verschilt in zoverre van de karakteristiek van het traditionele vraagstukje (zie blz. 115/116) dat de vraag of wat daar op neerkomt achterwege blijft. Gelijk met het verdwijnen van de vraag, vervalt wat onder 2, 3 en 4 werd vermeld, waardoor het gehele karakter van de opgave anders wordt. We kunnen zelfs de vraag stellen of dit stukje taal met kwantitatieve gegevens voor de kinderen nog wel een „opgave" is. Voor som-

[1]) Joh. Seemann: „Untersuchungen über die Psychologie des Rechens und der Rechenfehler" (pag. 31).
[2]) Deze proef is m.m. verschenen als artikel in Ond. en Opv. no. 12, 8e jg. blz. 337—343.

migen misschien wel, voor anderen niet. We kunnen er wel weer een „opgave" van maken, nl. door de volgende opdracht: „Lees dit goed. Denk er over na. Schrijf zoveel vragen op als je vinden kunt en reken na iedere vraag uit wat je weten wilt". Wil het kind aan deze opdracht voldoen dan zal het zich eerst moeten verdiepen in de situatie en daarin relaties en problemen ontdekken om tot het stellen van een vraag te komen. Dit stellen van een vraag betekent tegelijkertijd een anticiperen op de oplossing nl. het vermoeden:

a. dat er een oplossing te vinden is.
b. dat deze in een bepaalde richting te vinden is.
c. dat de daarvoor benodigde gegevens in de opgave te vinden zijn.

Wij menen, dat er een zekere overeenkomst is tussen de aanpak van het vraagloze vraagstukje en de wijze waarop men het kwantitatieve aspect van de werkelijkheid tracht te benaderen. In verschillende situaties dringt de werkelijkheid problemen aan ons op en moeten wij in verband daarmee vragen formuleren en gegevens zoeken om een oplossing te vinden. Bij het toegepaste rekenen gaat het er toch immers om een zo goed mogelijke aanpassing te bereiken t.a.v. deze kwantitatieve zijde der werkelijkheid. Als ik in de winkel een doosje sigaretten en een half ons tabak koop, kunnen de volgende vragen bij mij opkomen: Hoeveel moet ik betalen? Heb ik genoeg gepast geld? Als ik met een rijksdaalder betaal? Is dit te weinig, juist genoeg, te veel? Hoeveel krijg ik terug? etc.
Het probleem komt uit de situatie voort.
Ervaringen uit de school t.a.v. de traditionele vraagstukjes wettigen het vermoeden, dat het probleem er is vóór het kind zich de situatie gerealiseerd heeft, waaruit dit probleem is voortgekomen.
Hoe dikwijls komt niet een leerling bij de onderwijzer vertellen, dat hij „de som niet kan", terwijl blijkt, dat hij alleen maar de

vraag gelezen heeft! Het is mogelijk, dat de vraag de benadering van de situatie in de weg staat. De vraag dwingt ons de situatie op een bepaalde wijze te benaderen, te structureren.

De volgende proef moge enige gegevens verschaffen over de wijze, waarop een aantal leerlingen uit een 3e en 4e klas van een lagere school zich gedroegen t.a.v. een z.g.n. „vraagloos" vraagstukje uit een der leerstofkernen van het Pedagogisch Centrum.

In het „Rapport van de Studiecommissie voor het Onderwijs in de didaktiek van het vak rekenen op de lagere school" (Werkverband C.A.V.O.-Ped. Centrum N.O.V.) wordt „leren rekenen" omschreven als: „het leren ontdekken van kwantitatieve gegevens en het leren „zien" van relaties tussen deze gegevens, alsmede het leren beheersen der rekentechnieken".
Juist in verband met het eerste deel van deze omschrijving hebben wij de volgende steekproef met een „vraagloos" vraagstukje genomen en de resultaten ervan geanalyseerd.

Vraagstelling.

a. Kunnen leerlingen (i.c. van een 3e en 4e klas) uit een stukje taal, waarin kwantitatieve gegevens zijn verwerkt, relaties van kwantitatieve aard ontdekken?
b. Kunnen zij zelf vragen formuleren in verband daarmee?
c. Zijn ze in staat op de zelf geformuleerde vragen een juist antwoord te geven?
d. Is er een karakteristiek verschil en/of overeenkomst tussen de resultaten van de 3e en de 4e klas?

Opgave: „Uit een fles levertraan gaan 42 volle eetlepels. Loes krijgt elke ochtend en avond een eetlepel levertraan en Jaap alleen 's avonds in alle maanden die een „r" in hun naam hebben".

Proefklassen: III, aantal leerl. 28, gem. leeft. 8 jr. 11 m.
IV, „ „ 34, „ „ 10 jr.

Het was de eerste keer, dat deze leerlingen een dergelijk „vraagloos" vraagstukje kregen aangeboden. Om de bedoeling van deze opgave duidelijk te maken, gaven we de leerlingen de volgende opgave:
„Jan heeft 25 knikkers en Piet 30".
Ond.: „Wie kan hiermee gaan rekenen?"
Uit de klas kwam het volgende:
Piet heeft 5 meer.
Jan heeft 5 minder.
Samen hebben ze 55.
Ond.: „Goed. Nu hebben jullie telkens een antwoord gezegd. Wie kan hierover iets vragen?"
Dit leverde op:
Hoeveel heeft Piet meer dan Jan?
Hoeveel heeft Jan minder dan Piet?
Hoeveel hebben Jan en Piet samen?
Hierna kwam bovengenoemde opgave op het bord te staan.
De opdracht luidde:
„Lees dit goed. Denk er over na. Schrijf zoveel vragen op als je vinden kunt en reken na iedere vraag uit wat je weten wilt".
Het resultaat was een grote verscheidenheid van vragen, waardoor we genoodzaakt waren deze te rubriceren. Dit geschiedde als volgt:

a. aantal vragen door de kinderen gesteld.
b. aantal vragen, waarin kwantitatieve gegevens i.v.m. de opgave, waarmee ook werkelijk gerekend werd, b.v.
   Hoeveel dagen doet Loes met een fles?
   Loes doet er 21 dagen mee.
c. Aantal vragen, waarin wel kwantitatieve gegevens voorkwamen, doch waarmee verder niet gerekend werd, omdat de antwoorden direct uit de opgave te lezen waren, b.v.: Hoeveel lepels krijgt Loes per dag?
d. aantal goed beantwoorde vragen sub b.
e. aantal foutief beantwoorde vragen sub b.

f. aantal vragen, dat foutief gesteld en beantwoord werd als direct gevolg van verkeerd lezen of niet begrijpen van het gelezene.
   b.v. Hoeveel levertraan krijgt Jaap?
   Jaap krijgt elke maand een eetlepel.
g. aantal vragen, waarin geen kwantitatieve gegevens voorkwamen, b.v. Waarom krijgen Jaap en Loes levertraan? Loes en Jaap krijgen levertraan, omdat het zo goed is.
h. aantal „vragen", waarbij we zonder meer niet kunnen nagaan of ze t.a.v. de inhoud direct verband hielden met de gegevens uit het „vraagloze" vraagstukje, b.v.: Dat is in 4 weken 4 liter.
i. aantal vragen, dat wel werd gesteld, doch waarbij verzuimd werd de oplossing te geven, b.v.:
   Hoeveel eetlepels krijgt Jaap in januari?
   Het antwoord ontbrak.

Klas III, 28 ll.	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Aant. vr.	103	34	18	21	13	1	7	22	21
Aant. vr. in %	100	33	17	20	13	1	7	21	20
Aant. ll.	27	15	10	11	7	1	5	7	9
Aant. II. in %	96	54	36	39	25	4	18	25	32

Klas IV, 34 ll.	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Aant. vr.	126	94	3	69	25	2	26	—	1
Aant. vr. in %	100	75	2	55	20	2	21	—	1
Aant. ll.	33	31	3	30	15	2	18	—	1
Aant. II. in %	97	91	9	88	44	6	53	—	3

Vergelijking der resultaten van klas III en IV.

1. In beide klassen werden gemiddeld per leerling bijna 4 vragen gesteld.

2. In beide klassen is 1 leerling, die niet tot het stellen van een vraag kon komen.
3. Verder blijkt, dat in klasse III 1 leerling en in klasse IV 2 leerlingen onder rubriek f (verkeerd gelezen of niet begrepen) vallen.

Tot zover een treffende overeenkomst.

Nu enige verschillen:

1. Klasse III leverde 33 % en klasse IV 75 % vragen, die geheel aan de opdracht beantwoordden (zie sub. b).
   Klasse III beantwoordde daarvan 62 % goed en klasse IV 73 %.
2. De rubrieken f, g, h en i herbergen voor klasse III totaal 50 % en voor klasse IV 23 % van de vragen. Deze rubrieken bevatten de vragen, welke in verschillende zin niet aan de opdracht beantwoordden.
3. In klasse III heeft 54 % van het aantal leerlingen deel aan de goede vragen, in klasse IV 91 %.
4. Klasse III weet minder weerstand te bieden aan de verleiding vragen te stellen, waarop het antwoord onmiddellijk uit de opgave is te lezen dan klasse IV, nl. resp 17 % en 2 %. Daartegenover staat echter, dat klas III zich t.a.v. rubriek g (aantal vragen waarin geen kwantitatieve gegevens voorkomen) beter aan de opdracht weet te houden dan klas IV, nl. resp. 7 % en 21 %.

Wat betreft de resultaten van deze proef menen we het volgende in verband met de vraagstelling te mogen concluderen:

a. dat leerlingen van een 3e en 4e klas in staat zijn uit een stukje taal, waarin kwantitatieve gegevens zijn verwerkt, relaties hiertussen te ontdekken, en
b. in verband daarmee zelf vragen formuleren, die aan de opdracht beantwoorden en wel in toenemende mate, wanneer de leeftijd vordert.
c. dat de leerlingen uit een 4e klas beter in staat zijn op de zelfgestelde vragen een juist antwoord te geven, dan die van de 3e klas (hoewel het verschil niet erg groot is).
d. dat er t.a.v. het aantal gestelde vragen per leerling in beide klassen een treffende overeenkomst bestaat, doch dat de 4e klas in het algemeen kwalitatief, d.w.z. opdracht gebonden, betere vragen stelt dan de 3e.

Tot zover deze proef.

Het lijkt ons in het algemeen van het grootste belang, dat men de leerlingen gelegenheid geeft tot het stellen van vragen aan de leerstof. Dit bevordert in sterke mate het doordringen in de stof, het zelfvertrouwen en het denken. De vragen, die in school gesteld worden, komen nog maar al te vaak eenzijdig van de leerkracht of de schrijver van het boekje. Wellicht is een van de oorzaken dat de kinderen, eenmaal de school verlaten hebbende, zo volslagen vreemd tegenover verschillende situaties staan . . . nu er geen meester meer is, die op schoolse wijze vraagt.

Zelf problemen ontdekken, analyseren en vragen formuleren is een creatieve bezigheid, welke mede ons gedrag in concrete situaties helpt vormen.

Tot slot komen wij terug op hetgeen bij de aanvang werd betoogd, nl. dat wij het waardevolle in het nieuwe moeten trachten te ontdekken en dit in ons pedagogisch en didaktisch handelen moeten inpassen.

Wij menen in verband met het „vraagloze" vraagstukje iets waardevols aan het licht gebracht te hebben. We hebben ons daarbij „afgezet" tegen 't traditionele vraagstuk. Dit laatste zal echter om verschillende redenen niet uit de school moeten verdwijnen. Wij menen echter voor het „vraagloze" vraagstukje een plaats te moeten inruimen in ons rekenonderwijs. Welke plaats? In welke klassen? Dit is zonder verdere proeven niet te bepalen. — veel zal afhangen van de waarde, die men in de toekomst aan dit soort vraagstukjes zal gaan toekennen.

Proef 2. Men hoort vaak beweren t.a.v. de slechte resultaten in verband met het oplossen van rekenvraagstukjes: „De kinderen kunnen niet lezen". Deze bewering houdt dan meteen in, dat men er zonder meer van overtuigd is, dat het zuivere rekenwerk van deze opgaven de leerlingen geen moeilijkheden geeft. Ze maakten de „rijtjes" sommen toch immers zo goed!
Om deze bewering te toetsen geven we de volgende 5 rekenvraagstukjes, zoals ze doorgaans in de rekenboekjes gegeven worden:

Opg. 1. Henk is over 6 weken en 4 dagen jarig.
Dat duurt nog .... dagen.

Opg. 2. In 1 schoollokaal hangen 4 lampen.
In 9 schoollokalen hangen .... lampen.

Opg. 3. In een zaal kunnen 98 mensen zitten.
Er zijn al 56 mensen. Er kunnen nog bij .... mensen.

Opg. 4. Moeder koopt voor 76 ct vis. Zij geeft een rijksdaalder.
Zij krijgt terug .... ct.

Opg. 5. Een werkman spaart in 1 week 2 gulden.
42 gulden spaart hij dan in .... weken.

Proefklassen: IIIa, aantal leerl. 32, gem. leeftijd 8 : 7.
IIIb, „ „ 37, „ „ 8 : 6.

Enkele dagen, nadat de leerlingen deze opgaven hadden gemaakt kregen ze het „zuivere" rekenwerk uit deze vraagstukjes aangeboden.
De kinderen mochten aan deze opgaven werken tot ze klaar waren.

Overzicht der resultaten (1).

Klasse IIIa, 32 leerlingen.

Opgave	1	2	3	4	5	totaal
aant. goede opl.	17	28	16	6	5	72
aant. goede opl. in %	53	88	50	19	16	45
Klasse IIIb, 37 leerl.						
aant. goede opl.	24	28	21	5	3	81
aant. goede opl.	65	76	57	14	8	44

Het totaal resultaat is van beide klassen praktisch gelijk nl. resp. 45 % en 44 %.
Vergelijken we de resultaten van de 5 opgaven, dan blijkt er de volgende rangorde, wat de opklimming in moeilijkheden betreft, te bestaan: 2, 1, 3, 4 en 5.

Enige dagen, nadat de klassen deze vraagstukjes gemaakt hadden, moesten ze het zuivere rekenwerk eruit maken, nl.:

Opg. 1: $6 \times 7 = \ldots.$
$42 + 4 = \ldots.$

Opg. 2: $9 \times 4 = \ldots.$

Opg. 3: $56 + \ldots = 98.$ $98 - 56 = \ldots.$

Opg. 4: 1 rijksd. = ... ct. 250 ct — 76 ct = ... ct.
76 ct + ... ct = 250 ct.

Opg. 5: $42 = \ldots \times 2$
$42 : 2 = \ldots.$

Uit de resultaten, bereikt met dit rekenwerk, konden we afleiden, of de rekenvaardigheid, bij al dan niet slagen van de oplossing der vraagstukjes, een rol gespeeld heeft.

Overzicht van de resultaten van dit werk (II).

Klasse IIIa, 32 leerlingen.

Opgave	1	2	3	4	5	totaal
aant. goede opl.	22	32	24	6	17	100
aant. goede opl. in %	69	100	75	16	53	63

Klasse IIIb, 37 leerlingen.

aant. goede opl.	28	37	33	6	15	119
aant. goede opl. in %	76	100	89	16	41	64

Het bereikte resultaat van dit zuivere rekenwerk is in beide klassen nagenoeg gelijk, resp. 63 % en 64 %.
Vergelijken we weer de resultaten van de 5 opgaven, dan krijgen we de volgende rangorde der opgaven, wat de opklimming in moeilijkheid betreft: 2, 3, 1, 5 en 4.

Vergelijken we het totaalresultaat van de vraagstukjes met dat van het zuivere rekenwerk dan valt er, wat te verwachten was, in het algemeen een stijging te constateren t.a.v. het laatste, nl.:
Klasse IIIa van 45 tot 63 %
Klasse IIIb van 44 tot 64 %,
waaruit wij menen te mogen concluderen, dat er in deze derde klassen bij het oplossen van bovenstaande vraagstukjes een groot tekort aan fundamentele rekenvaardigheid blijkt te bestaan, nl. van resp. 37 en 36 %.

Overzicht III.

Klasse IIIa, 32 leerlingen.

Opgave	1	2	3	4	5	Gem.
res. vraagst.	53	88	50	19	16	45
res. zuiver rekenwerk	69	100	75	16	53	63
verschil	+ 16	+ 12	+ 25	— 3	+ 37	+ 17

Klasse IIIb, 37 leerlingen.

res. vraagst.	65	76	57	14	8	44
res. zuiver rekenwerk	76	100	89	16	41	64
verschil	+ 11	+ 24	+ 32	+ 2	+ 33	+ 20

Beschouwen we het verschil tussen de resultaten, die bereikt werden bij het oplossen van de vraagstukjes en die van het zuivere rekenwerk, dan kunnen we constateren, dat bij opg. 5 de moeilijkheid in hoofdzaak ligt in het niet kunnen doorzien van de relatie, zodat de leerlingen niet tot de juiste keuze van

de bewerking in staat waren. In beide klassen stemt het verschil vrijwel overeen, nl. resp. + 37 en + 33 %.
Bij opgave 4 ligt de moeilijkheid geheel op het terrein der rekenvaardigheid en van de parate kennis (1 rijksd. = ... ct!)
Het resultaat van het zuivere rekenwerk geeft t.a.v. de vraagstukjes praktisch geen verschil te zien. Bij klasse IIIa zien we zelfs een slechter resultaat bij het zuivere rekenwerk (— 3 %).
Bij opgave 2 bleek iedere leerling in staat uit te rekenen: $9 \times 4 = \ldots$. Uit het verschil resp. + 12 % en + 24 % blijkt, dat hier de moeilijkheden uitsluitend liggen op het terrein van het lezen, het doorzien van de relatie en de daarop berustende keuze der bewerking.
Ten aanzien van opg. 1 en 3 kunnen we zeggen, dat de relatie bij opg. 1 gemakkelijker te doorzien blijkt dan bij opg. 3. Typisch is echter, dat klasse IIIa opg. 2 beter doorziet dan klasse IIIb. Bij opg. 1 is het tegendeel het geval, hoewel niet zo pregnant.

Conclusie:
De oorzaak van het in het algemeen teleurstellende resultaat bij het oplossen van rekenvraagstukjes moeten we niet in de eerste plaats zoeken in het „niet kunnen lezen" van de opgave, doch in een gebrek aan fundamentele rekenvaardigheid.

In onze proefklassen ligt de verhouding ongeveer 1 : 2 (hoewel deze van opgave tot opgave verschilt). We mogen echter verwachten, dat door voortschrijding van ontwikkeling enerzijds en onderwijs anderzijds, de rekenvaardigheid zal worden opgevoerd, zodat voor verschillende leeftijdsgroepen de verhouding anders komt te liggen.

Proef 3. Deze proef bestaat uit 4 opgaven, nl.:
Opg. 1. Vaders schoenen zijn stuk. De schoenmaker maakt er nieuwe zolen en hakken onder voor *f* 4,75. Vader betaalt met *f* 10,—. Hij krijgt terug *f* ....

Opg. 2. Moeder zegt tegen de schoenmaker: „Ik wil graag zolen en hakken onder mijn schoenen".
Prijslijst:
Heren: zolen en hakken, leer *f* 4,75, rubber *f* 3,75
Dames: zolen en hakken, leer *f* 3,75, rubber *f* 2,75
Zij betaalt met *f* 10,—.
Zij krijgt terug *f* . . . .

Opg. 3. Prijslijst:
Heren: zolen en hakken, leer *f* 4,75, rubber *f* 3,75
Dames: zolen en hakken, leer *f* 3,75, rubber *f* 2,75
Vader en moeder laten elk een paar schoenen repareren. Vader krijgt er rubber onder en moeder leer. Vader betaalt met *f* 25,—. Hij krijgt terug *f* . . . .

Opg. 4. Drie maanden later laat vader 2 paar schoenen met leer verzolen en moeder een paar met rubber.
Moeder betaalt met *f* 25,—.
Zij krijgt terug *f* . . . .

Proefklassen IVa, aantal leerl. 32, gem. leeftijd 10 : 2.
IVb, „ „ 30, „ „ 10.

Bij deze opgaven hebben we getracht een opklimming van moeilijkheden te geven, nl. door invoering van nieuwe relaties. Zowel de taal als de zakelijke inhoud is voor ieder normaal kind uit een 4e klas te begrijpen. Ieder kind heeft wel eens verkeerd in de situatie van: kopen — betalen — terugontvangen. Dit is het principe, waarop deze opgaven zijn gebaseerd. De nieuwe relaties hebben steeds betrekking op het „kopen" (i.c. het kopen van nieuwe zolen en hakken!). De berekening van de totaalprijs wordt steeds ingewikkelder.

De vraagstelling bij deze proef luidt:
1. Kan men door het aantal relaties in een opgave te vermeerderen de opgave verzwaren?

2. Zo ja, kunnen we dan d.m.v. analyse der resultaten ook concluderen of de relaties onderling kwalitatieve verschillen tonen?

De opdracht voor deze opgaven luidde als volgt:
„Maak deze 4 opgaven. Lees ze nauwkeurig, denk er goed over na. Schrijf niet alleen het antwoord op, maar ook het „sommetje", zodat ik kan zien, hoe je er aan gekomen bent. De achterkant van je blaadje mag je gebruiken om wat uit te rekenen".
Daar de opdracht nogal gecompliceerd was, moesten enkele kinderen voor de klas komen en met eigen woorden vertellen, wat ze moesten doen. De overige kinderen mochten vragen, wanneer ze iets, de opdracht betreffende, niet begrepen hadden.

Wij kregen nu een vrij goed overzicht van de wijze, waarop de kinderen tot een antwoord kwamen, zodat we konden vaststellen, wie wel en wie niet de voor de oplossing noodzakelijke relaties had doorzien. Kinderen, die verzuimd hadden het „sommetje" te noteren of bij wie uit de notatie niet duidelijk bleek, of ze de juiste relatie gehanteerd hadden, moesten naderhand mondeling toelichten hoe ze gedaan hadden. Op deze wijze verzamelden wij de gegevens voor het volgende overzicht.

Overzicht I.

Klas	IVa				IVb			
Opgaven	1	2	3	4	1	2	3	4
aant. goede opl.	27	17	13	8	25	15	15	5
aant. goede opl. in %	84	53	41	25	83	50	50	17
relaties doorzien	32	21	17	11	27	16	16	8
relaties doorzien in %	100	66	53	34	90	53	53	27

We nemen voor onze analyse klasse IVa.

Uit het overzicht blijkt, dat van deze klas 100 % der leerlingen de zakelijke inhoud van opg. 1 begrepen heeft; allen waren in staat de relatie tussen schoenreparatie — betalen en terugontvangen van het teveel betaalde, te doorzien. Deze opgave suggereert dus een situatie, waarin ieder kind wel eens heeft verkeerd, bijv. bij het doen van boodschappen.
De oplossing werd genoteerd op een van de volgende wijzen:
f 10,— — f 4,75 = f 5,25
of f 4,75 + f 5,25 = 10,—.

Opgave 2 is moeilijker, doordat de leerlingen hierbij een prijslijst moeten kunnen lezen en hanteren. Terwijl bij opg. 1 de prijs van de reparatie direct gegeven is, moet deze bij opg. 2 met behulp van de prijslijst gezocht worden. De situatie is dus ingewikkelder geworden. Er worden hogere eisen gesteld aan het analyserend en combinerend vermogen (denken!) der leerlingen. Voor zes leerlingen bleek de prijslijst een onoverkomelijke moeilijkheid. Dit kwam duidelijk aan het licht bij de mondelinge analyse. Hoewel de betrokken leerlingen de opgave enige keren rustig mochten overlezen, konden ze nadien geen antwoord geven op de vraag: „Hoeveel moet moeder voor de schoenreparatie betalen?"
Acht leerlingen kregen bijv. als antwoord f 3,50.
Ze redeneerden als volgt: Zolen voor dames kosten f 3,75, hakken f 2,75. Samen f 6,50. Moeder krijgt terug f 10,— — f 6,50 = f 3,50. De moeilijkheid voor deze kinderen lag in het begrijpend lezen en hanteren van de prijslijst. Hier volgen enige foutieve antwoorden:

1. f 10,— — f 3,75 — f 2,75 = f 3,50
2. f 10,— — f 6,50 = f 3,50
3. f 10,— — f 5,50 = f 4,50
   f 5,50 = 2 × f 2,75 (dames rubber)
4. f 3,75 + f 2,75 = f 5,50.

Bij opg. 3 is de situatie ingewikkelder gemaakt, doordat zowel vader als moeder een paar schoenen laten herstellen. Het aantal gegevens neemt toe en daardoor de noodzaak tot grotere concentratie om al de gegevens gedurende de tijd, welke nodig is om de opgave tot oplossing te brengen, „onder controle" te houden. Bij mondelinge analyse bleek telkens weer, dat verschillende leerlingen de draad kwijtraakten en weer van voren af moesten beginnen. Opvallend weinig leerlingen kwamen er toe uit zichzelf een deel-uitkomst te noteren als steun voor het geheugen. Vooral voor kinderen met een zwak geheugen voor getallen kan dit een grote steun betekenen, vooral bij een zgn. trapsgewijze oplossing zoals deze, waar meerdere relaties en berekeningen in het geding zijn.

a. f 3,75 + f 3,75 = f 7,50 of 2 × f 3,75 = f 7,50.
b. f 25,— — f 7,50 = f 17,50 of f 7,50 + f 17,50 = f 25,—.
of: a. f 25,— — f 3,75 = f 21,25
    b. f 21,25 — f 3,75 = f 17,50

We noteren hier enkele foutieve antwoorden:

1. f 25,— — f 6,50 = f 18,50
   f 6,50 = f 3,75 (heren rubber) + f 2,75 (dames rubber)
2. f 25,— — f 3,75 = f 21,25 (1 paar heren rubber f 3,75)
3. f 25,— — f 15,— = f 10,—. Alle prijzen uit de prijslijst bij elkaar is f 15,—.
4. f 25,— — f 8,50 = f 13,50.
   f 8,50 = f 4,75 (heren leer) + f 3,75 (dames leer)
5. f 25,— — f 5,50 = f 19,50
   f 5,50 = 2 × f 2,75 (dames rubber).

Voor 3 leerlingen zat er een moeilijkheid in het laatste deel van de opgave nl.: „Vader betaalt met f 25,—. Hij krijgt terug f . . . ." Deze kinderen lieten vader alleen zijn eigen schoenreparatie betalen! Bij opgave 4 waren het juist deze leerlingen, die moeder hetzelfde lieten doen t.a.v. haar schoenreparatie.

Opg. 4 werd moeilijker gemaakt door een nieuwe relatie in te voegen. Vader laat nu „2 paar" schoenen verzolen. 4 leerlingen brachten voor vader 1 paar i.p.v. 2 paar schoenen in rekening. Bij mondelinge analyse bleek, dat deze kinderen de opgave feilloos oplazen — doch bij het uitrekenen, zonder uitzondering, voor vader de reparatie van 1 paar schoenen in de berekening opnamen. Ook bij deze opgave bleek weer hoe nuttig het voor de meeste kinderen zou zijn de tussenkomsten vast te leggen — te schematiseren. Velen raakten verstrikt in de getallen en wisten niet meer, wat ze uitgerekend hadden.

De volgende fouten kwamen o.a. voor:

1. *f* 25,— — *f* 7,50 — *f* 2,75 = *f* 14,75.
   f 7,50 is als volgt ontstaan: *f* 4,75 (heren-leer) +
   f 2,75 (dames-rubber).

2. *f* 25,— — *f* 10,25 = *f* 10,—.
   f 15,— = 2 × *f* 4,75 (heren-leer) + 2 × *f* 2,75 (dames-rubber).

3. *f* 25,— — *f* 10,25 = *f* 14,75.
   f 10,25 = *f* 4,75 (heren-leer) + *f* 2,75 (dames-rubber)
   + *f* 2,75 (idem).

4. *f* 25,— — *f* 7,50 = *f* 17,50 (zie sub 1).

5. *f* 25,— — *f* 2,75 = *f* 22,25 (1 paar dames-rubber: *f* 2,75).

De analyse van klasse IVb toonde t.o.v. klasse IVa wel kwantitatieve, doch geen kwalitatieve verschillen. We menen derhalve te kunnen volstaan met alleen de analyse van klas IVa.
Men kan zeer terecht de vraag stellen, of een leerling, die de relatie bij opg. 1 niet kon doorzien, deze bijv. bij een der volgende opgaven, die we als „moeilijker" hebben aangemerkt, wel doorzag. Het volgende overzicht, waarbij de leerlingen der beide klassen (62 leerl.) betrokken zijn, geeft hieromtrent een beeld.

Overzicht II.

Aantal leerl.	Opg. 1	Opg. 2	Opg. 3	Opg. 4
3	x	x	x	x
11	r	x	x	x
13	r	r	x	x
8	r	r	r	x
14	r	r	r	r
8	r	x	r	x
2	r	x	r	r
1	r	r	x	r
1	r	x	x	r
1	x	r	r	r
62	59 95 %	37 60 %	33 53 %	19 31 %

r betekent, dat de relatie doorzien werd.
x betekent, dat de relatie niet werd doorzien.

Uit dit overzicht blijkt, dat 3 leerl. (= 5 %) voor dit soort opgaven geen goede aanpak weten te vinden. Voor hen zijn deze opgaven te moeilijk.
11 leerl. (18 %) begrijpen de situatie, doch zien geen kans de prijslijst te hanteren.
49 leerl. (79 %) gedragen zich voorbeeldig naar de opklimmende graad van moeilijkheid, welke we in de opgaven aangebracht hadden.
13 leerl. (8 + 2 + 1 + 1 + 1, 21 %) gedragen zich t.o.v. deze opklimmende moeilijkheden onregelmatig.
Het is moeilijk de oorzaak van deze onregelmatigheden op te sporen. Daar opg. 1 t.m. 4 gelijksoortig zijn en alleen verschillen in moeilijkheid, menen we te mogen veronderstellen, dat oorzaken kunnen liggen in het volgende:

1. Doordat we te doen hebben met gelijksoortige opgaven is het mogelijk, dat een kind, al werkend, plotseling tot inzicht komt en bijv. opg. 4 doorziet, terwijl het bij opg. 2 en 3 nog faalde.

2. Vermindering van concentratie op een bepaald ogenblik kan onjuist lezen tot gevolg hebben, waardoor verkeerde relaties worden gehanteerd.

De redactie van opg. 3 en 4, nl. Vader resp. Moeder betaalt met *f* 25,—. Ze krijgt terug *f* . . . ., is aanleiding geweest, dat in totaal 4 leerl. (= 6 %) zowel bij opg. 3 als 4 de ouders alleen hun eigen schoenreparatie lieten betalen. Dit neemt echter niet weg, dat het verschil der resultaten bij opg. 3 en 4 22 % bedraagt. Dit grote verschil moeten we niet alleen wijten aan het feit, dat in opgave 4 een relatie meer verwerkt is, doch tevens aan de meer gecompliceerde berekening. De kinderen trachtten de getallen en relaties, benevens de deeluitkomsten in het geheugen vast te houden, terwijl hiervoor een schematische notatie van de gegevens en deel-uitkomsten een grote steun geweest zou zijn, waardoor er meer kans zou zijn op betere resultaten.
In verband met de vraagstelling van deze proef komen we tot de volgende conclusie:

1. Uit de resultaten van de proef blijkt, dat het invoegen van meerdere relaties de opgave verzwaart. O.i. mogen we deze verzwaring niet geheel op rekening schrijven van deze invoeging, doch ook op het feit, dat als gevolg ervan de bewerkingstijd toeneemt en daardoor een sterker beroep wordt gedaan op het geheugen en de concentratie van de leerlingen.

2. Uit overzicht II blijkt, dat het invoegen van de prijslijst een grote invloed heeft gehad op de resultaten, nl. een daling van 35 %, terwijl opgave 2, wat bewerking betreft, op hetzelfde niveau staat als opg. 1. Het verschil tussen opg. 2 en

3 is slechts 7 %, waaruit we concluderen, dat de toegevoegde relatie bij opgave 3 geen noemenswaardige verzwaring betekent, waarbij we nog moeten bedenken, dat 4 leerl. (7 %) moeder alleen haar eigen schoenen lieten betalen — waartoe de redactie der opgave enige aanleiding geeft. Bedoelde leerlingen behandelden opg. 4 op gelijke wijze. Daartegenover staat echter, dat het verschil tussen opg. 3 en 4 22 % bedraagt.
De nieuwe relatie is hier: Vader laat 2 paar schoenen repareren. 11 % der kinderen heeft deze hindernis niet kunnen nemen; zij schreven *f* 25,— — *f* 7,50 (1 paar heren-leer + 1 paar dames-rubber).
We willen nog opmerken, dat de meest gecompliceerde opgave het laatst gemaakt moest worden en als gevolg daarvan, door toenemende geestelijke vermoeidheid, in haar resultaat ongunstig beïnvloed werd.

Uit deze proef blijkt, dat er kwalitatieve verschillen bestaan tussen de ingevoegde relaties. Hier zal een meer omvattend onderzoek moeten uitwijzen, welke relaties door de kinderen gemakkelijker en welke moeilijker gehanteerd worden, wil men van dit middel een vruchtbaar gebruik kunnen maken om rekenvraagstukjes te verzwaren.

Proef 4. Deze proef bestaat uit 5 opgaven uit het leerstofgebied: kopen en betalen.

Opg. 1. 1 ei kost 14 ct.
10 eieren kosten . . . . ct.

Opg. 2. 1 ei kost 15 ct.
27 eieren kosten . . . .

Opg. 3. 2 sinaasappelen kosten een kwartje.
10 sinaasappelen kosten . . . .

Opg. 4. 2 sinaasappelen kosten een kwartje.
24 sinaasappelen kosten . . . .

Opg. 5. Moeder koopt 9 sinaasappelen.
Er zijn grote en kleine.
De grote kosten 25 ct. en de kleine 20 ct.
Ze betaalt er *f* 2,— voor.
Zij krijgt .... grote en .... kleine.

Opg. 1 en 2 zijn gelijksoortig, doch bij opg. 2 is het „mooie" getal 10 uit opg. 1 vervangen door 27, waardoor de berekening moeilijker wordt.
Opg. 3 en 4 zijn eveneens gelijksoortig. Bij opg. 4 namen we weer een „moeilijker" getal. Verder verschillen deze beide opgaven met de vorige, doordat er een verhouding in voorkomt.
Opgave 5 heeft een geheel ander karakter. Hier ligt de moeilijkheid o.i. voornamelijk in de aanpak.
De proefleiders verklaarden unaniem, dat opgave 5 de moeilijkste van deze serie zou zijn.
Door deze proef trachten we een antwoord te vinden op de volgende vragen:

1. Betekent het invoeren van moeilijker getallen een verzwaring van de opgave?
   Zo ja, heeft dit dan alleen betrekking op het zuivere rekenwerk of heeft het ook invloed op het doorzien van de relatie?
2. Stemt het resultaat van opg. 5 overeen met de verwachting van de proefleiders?

Proefklassen: IIIa, aantal leerl. 31, gem. leeftijd 8 : 8
IIIb, „ „ 30, „ „ 8 : 10
IIIc, „ „ 39, „ „ 8 : 8
IVa, „ „ 30, „ „ 9 : 11
IVb, „ „ 30, „ „ 9 : 10
IVc, „ „ 38, „ „ 10
Va, „ „ 33, „ „ 10 : 9
Vb, „ „ 26, „ „ 11.

Door deze proef in drie opeenvolgende leerjaren te nemen, kunnen we tevens de resultaten van verschillende leeftijdsgroepen vergelijken.
Wij nemen voor onze analyse klas IVa. De leerlingen van deze klas hebben nl., op een enkele uitzondering na, niet alleen het antwoord genoteerd, doch tevens het „sommetje" opgeschreven, hetgeen de analyse vergemakkelijkt.

Overzicht I. (klas IVa, 30 leerlingen).

opgave:	1	2	3	4	5
aant. goede oplossingen	29	15	12	9	17
aant. goede oplossingen in %	97	50	40	30	57
aant. gemaakte rekenfouten	—	13	2	10	—
aant. gemaakte rekenfouten in %	—	43	7	33	—
aant. ll. dat relatie niet zag	1	2	18	18	13
aant. ll. dat relatie niet zag in %	3	6	60	60	43

De volgorde, wat opklimming in moeilijkheden betreft, is als volgt: 1, 5, 2, 3, 4.

Opg. 1. leverde slechts moeilijkheden op voor 1 leerl. Deze kon de opgave niet tot een oplossing brengen — zij maakte geen enkele opgave goed — kwam zelfs niet tot een antwoord (een zwakke leerlinge).

Opg. 2. 7 leerl. (23 %) kregen hier als antwoord: 27 × 14 ct = *f* 2,28 of 228 ct. Dit werd als volgt berekend:
27 × 14 ct = 20 × 10 ct + 7 × 4 ct = *f* 2,28.
3 leerl. (10 %) kregen als resultaat 298 ct.
27 × 14 = 20 × 10 ct + 7 × 14 ct = 298 ct.
1 leerl. (3 %) antwoord: 388 ct.
Berekening: 20 × 14 ct = 280 ct. 5 × 14 ct = 70 ct.

2 × 14 ct = 28 ct. Rekenfout bij de optelling van de gedeeltelijke produkten.
1 leerl. (3 %): 27 × 14 ct = 420 ct. Deze leerl. heeft steun gezocht bij een „mooi" getal 30 × 14 ct = 420 ct, doch daarna verzuimd 3 × 14 ct af te trekken.
1 leerl. (3 %) heeft de relatie niet juist gezien en schreef 10 × f 0,27 = f 2,70.

Uit deze analyse blijkt, dat slechts 2 leerl. de juiste relatie niet vermochten te doorzien. Een van deze leerl. heeft een 8 voor rekenen op zijn laatste rapport en behoort tot de beste rekenaars van de klas; hij is steeds met zijn rekenwerk, ook wat de vraagstukjes betreft, snel klaar en levert daarbij heel goed werk!

Bij analyse van de resultaten van opg. 3 bleek, dat 14 leerl. (47 %) uitrekenden 10 × f 0,25 = f 2,50. Deze leerlingen hebben de relatie niet juist gezien:
2 sin. .... 25 ct.
10 sin. .... 5 × zoveel.

1 leerl. schreef 10 × 2 ct = 20 ct. Deze leerl. was zich er blijkbaar vaag van bewust, dat de 2 er wel iets mee te maken had. Elke controle op de mogelijkheid van de uitkomst ontbreekt.
1 leerl. noteerde slechts een antwoord: 420 ct.
1 leerl. noteerde f 6,—, waaruit bleek dat ze opg. 4 i.p.v. opg. 3 had gemaakt.
60 % der leerlingen doorzag van deze opgave de relatie niet.

Opg. 4.
9 leerl. (30 %) maakten deze opgave goed; hieronder is 1 leerl. die opg. 3 niet goed oploste (10 × 25 ct = f 2,50).
Bij opgave 4 doorzag ze de relatie wel. Spontaan doorbraak van inzicht?

4 leerl. (13 %) die opg. 3 goed oplosten, faalden bij opg. 4.
De antwoorden luidden als volgt:
12×25 ct = f 2,10. (10×20 ct = f 2,—; 2×5 = 10 ct f 2,10!)
12×25 ct = f 2,60. (10×25 ct = f 2,50; 2×5 = 10 ct f 2,60!)
f 3,25??
f 3,50. 10 × f 0,25 = f 2,50, 4 × f 0,25 = f 1,—.
f 2,50 + f 1,— = f 3,50.
Voor deze leerl. bleek de berekening een onoverkomelijke moeilijkheid te zijn.

6 leerl. (20 %) noteerden: 24 × f 0,25 = f 6,—.
Andere antwoorden waren: 24 × 25 ct = f 3,40??
24 × 25 ct = f 4,20 (20 × 20 ct = 400 ct. 4 × 5 ct = 20 ct, 400 + 20 = f 4,20).

24 × 25 ct = f 2,10. Vergelijken we deze uitkomst met bovenstaande, dan is deze juist de helft ervan. Was er een vaag begrip van de juiste relatie?
10 × 20 ct = f 200 ct. 2 × 5 ct = 10 ct
200 ct + 10 ct = f 2,10.

24 × 25 ct = f 0,40. Misschien 4 × 5 ct = 20 ct.
2 × 20 ct = 40 ct.

24 × 1 kw. = f 500. (20 × 1 kw. = 500 ct?)
700 ct. 20 × 25 ct = 600 ct. 4 × 25 ct = 100 ct. Samen 700 ct.
Typische notaties waren: 10 × 25 ct = f 2,40.
24 × 2 = 100 ct.

Bij deze opgave treedt, evenals bij opgave 2, waar de uitvoering van de bewerking werd verzwaard door een moeilijker getal in te voegen, *een groot gebrek aan fundamentele rekenvaardigheid aan het licht.*
De overeenkomst met opg. 3 ligt in het feit, dat bij beide opgaven de relatie in gelijke mate (40 %) wordt doorzien.

Opg. 5. De moeilijkheid bij deze opgave ligt in de aanpak — in het puzzlekarakter (trial and error). Het komt er nl. op aan de uitkomst op mogelijkheid en juistheid te controleren door de volgende vragen:

1. Heb ik in totaal 9 sinaasappelen?
2. Heb ik er *f* 2,— voor betaald?

Geen enkele leerling uit deze klas heeft een volledige verantwoording afgelegd. Wel werden verklaringen gegeven, zodat we enig inzicht krijgen in de wijze, waarop deze opgave opgelost werd.
17 leerl. (57 %) verkregen het goede antwoord.
Slechts 8 leerl. waren in staat iets over hun oplossing te noteren.

Hier volgen de notities:

1. 100 = 4 × een kwartje. 100 ook 5 × 20 ct. Dus 4 grote en 5 kleine.
2. 4 × 25 ct = *f* 1,—. 5 × 20 ct = *f* 1,—.
3. Ze krijgt 4 grote en 5 kleine, want 4 × 25 ct = 100 ct en 5 × 20 ct = 100 ct. 100 ct + 100 ct = 200 ct.
4. 4 × 25 ct = *f* 1,—. 5 × 20 ct = *f* 1,—. *f* 1,— + *f* 1,— = *f* 2,—.
5. Ze krijgt 4 grote en 5 kleine, want 4 s + 5 s = 9 sinaasappelen.
6. 4 groten = *f* 1,—. 5 kleinen = ook *f* 1,—. Dat is samen *f* 2,—.
7. Vier groten kosten *f* 1,— en 5 kleintjes 20 ct, samen *f* 1,—. *f* 1,— + *f* 1,— = *f* 2,—.
8. Zij krijgt 4 grote en 5 kleine. Want moeder kocht 9 sinaasappelen.

We zien hier telkens één controlemiddel vermeld, òf het bestede bedrag aan geld, òf het aantal sinaasappelen. Het is natuurlijk mogelijk, dat deze leerl. het andere middel min of meer onbewust hebben gehanteerd.
Het „trial and error" karakter blijkt vooral uit het werk van leerl., die geen goede oplossing geven.

13 leerl. (43 %) faalden bij deze opgave, waaronder 2 in het geheel geen antwoord vermelden.

Van de 11 leerl., die een onjuiste uitkomst kregen, vermeldden slechts 4 iets over hun pogen:

1. Antw.: 8 groten en 0 kleine.
   Ik heb eerst gedaan hoeveel grote sinaasappelen ik kon nemen, dat kunnen er 8 zijn en dan 0 kleine.

2. Antw.: 4 grote en 6 kleine.
   4 gr. 6 4 8 × *f* 0,25 = *f* 2,— 6 × *f* 0,25 = *f* 1,50 6 s.

3. Antw.: Ze krijgt 6 grote en 3 kleine sinaasappelen.
   8 × 25 ct = *f* x 6 × *f* 0,25 = *f* 1,30.

4. Antw.: 6 grote en 3 kleine.
   5 + 4 = 9. 5 × 25 = *f* 1,25 + 4 × 20 = 80 ct.
   Samen 1,25 + 80 ct = 205.
   6 + 3 = 9. 6 × 25 = 150 + 3 × 20 = 50.
   Samen 2.
   N.b. 150 . . . . *f* 2 . . . . daar past bij 3 × 20 = 50!

De resultaten, door een klas bereikt, kunnen sterk afhangen van de toevallige rekenlotgevallen van die klas — bepaalde „gevallen" zijn juist behandeld en liggen nog vers in het geheugen

e.d. Daarom hebben we deze proef ook in drie 3e, twee (andere) 4e en twee 5e klassen genomen. Het is de bedoeling te onderzoeken of we t.a.v. deze opgaven regelmatigheden, c.q. onregelmatigheden kunnen ontdekken, waarbij wij dan tevens beschikken over gegevens t.a.v. een eventuele ontwikkeling, wanneer de leeftijd toeneemt.

Hier volgt het overzicht van de resultaten:

Overzicht II.

Opgaven		1		2		3		4		5	
Klas	aant. l.l.	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
IIIa	31	94	94	19	94	10	10	3	6	39	39
IIIb	30	91	94	9	94	27	27	9	15	48	48
IIIc	39	92	97	13	95	13	13	5	10	38	38
IVa	30	97	97	50	97	40	40	30	40	57	57
IVb	30	97	100	50	100	43	50	20	50	67	67
IVc	38	92	100	61	100	47	47	26	37	81	81
Va	33	91	100	79	100	73	76	69	73	91	91
Vb	26	92	100	81	100	85	88	81	81	85	85

Rubriek a: aantal goede antwoorden in %.
Rubriek b: aantal leerl. dat de relatie doorzien heeft in %.

Uit het overzicht blijkt, dat opg. 1 de gemakkelijkste is en binnen het geestelijk bereik ligt van vrijwel alle leerl. van de proefklassen 3, 4 en 5. De resultaten liggen tussen 90 en 100 % (gem. 94 %).

Opg. 2 toont t.o.v. opg. 1 een aanmerkelijke daling der resultaten, terwijl de relatie in beide opgaven gelijk is en vrijwel in gelijke mate als bij opg. 1 werd doorzien. Nu moest echter de

prijs van 27 eieren worden berekend in plaats van die van 10. De daling in de 3e klassen is het grootst, nl. van gem. 92 % tot 14 % is 78 %, terwijl 94 % der leerlingen de relatie doorzag. In de 4e klassen van gem. 95 % tot 54 % is 41 %, 95 % der leerlingen doorzag de relatie.
In de 5e klassen van gem. 91 % tot 79 % is 12 %. De relatie werd door 100 % der leerlingen doorzien.

Vergelijken we de resultaten van opgave 3 met die van opgave 2 dan zien we:
a. bij één derde, 3 vierde en één vijfde klas een daling.
b. één derde klas levert bij beide opgaven een zelfde resultaat, terwijl
c. één derde en één vijfde klas een stijging vertonen.
Bij opgave 3 blijkt de moeilijkheid te liggen in het kunnen doorzien van de verhoudingsrelatie: 2 sinaasappelen .... 10 sinaasappelen.

Vergelijken we nu de gelijksoortige opgaven 3 en 4 dan konstateren we bij alle klassen in meer of mindere mate een daling.
In de 3e klassen gem. 11 %.
In de 4e klassen gem. 18 %.
In de 5e klassen gem. 4 %.

Bij de 3e klassen is deze daling minder groot dan in de 4e — de resultaten van de 3e klas bij opg. 3 zijn echter dermate gering, dat een grote daling niet mogelijk is!

De daling van opg. 2 t.o.v. opg. 1 is sterker dan die van opg. 4 t.o.v. opg. 3. Dit verschijnsel menen we te moeten verklaren uit het feit, dat de ingevoegde relatie in 3 en 4 selecterend werkt.

Opgave 5 toont een sterke steiging en komt in 7 van de 8 klassen boven de resultaten van opg. 2, 3 en 4.

Enige conclusies:

1. Het invoeren van moeilijker getallen betekent een verzwaring van de opgave. Deze verzwaring betreft, wanneer de relaties niet moeilijk te zien zijn, alleen het zuivere rekenwerk. Ligt de relatie moeilijker dan kunnen we slechts een geringe nadelige invloed constateren t.a.v. het doorzien van de relatie.
   Ten aanzien van het zuivere rekenwerk, nl. wat de aard der fouten betreft, willen we het volgende opmerken in verband met opg. 2. 27×14 ct = ...
   In alle klassen komen vaak dezelfde foutieve antwoorden voor. Hier volgen de voornaamste met het % van het totale aantal fouten (146) door de 8 klassen gemaakt.

27×14 ct = f 2,28	24 %
27×14 ct = f 3,08	8 %
27×14 ct = f 0,48	7 %
27×14 ct = f 2,98	5 %
Totaal	44 %

   Dit percentage is als volgt over de klassen verdeeld:
   3e klassen 27 %
   4e klassen 16 %
   5e klassen 1 %

   Verder werd geconstateerd, dat het aantal rekenfouten afneemt, naarmate de leerlingen ouder worden.

2. Opg. 5, die tevoren door de proefleiders unaniem als de moeilijkste werd aangemerkt, blijkt een beter resultaat te geven dan 2, 3 en 4.
   Hieruit blijkt, dat we niet zonder meer opgaven kunnen indelen naar moeilijkheid. De leerlingen blijken vaak heel anders tegenover een opgave te staan dan de volwassene onderstelt.

   Wij geven toe, dat deze opgave, wat de getallen betreft, vrij doorzichtig is. Het is echter niet onmogelijk, dat het puzzlekarakter en het onverwacht aanbieden van dit, niet gangbare, vraagstukje een verhoogde interesse en als gevolg daarvan een grotere inspanning actualiseert. Uitingen van kinderen als een „leuke", „fijne" som en „hoe kan dat nu?", wijzen in ieder geval op belangstelling. Zit er misschien een spelelement in?

3e. Tenslotte geven we een overzicht van de gemiddelde leeftijd per klas, alsmede de door de klassen bereikte resultaten.

Overzicht III.

Klas	Gem. leeftijd	Gem. res. in %
IIIa	8 : 8	32
IIIb	8 : 8	33
IIIc	8 : 10	37
IVa	9 : 10	55
IVb	9 : 11	55
IVc	10	62
Va	10 : 9	81
Vb	11	85

We constateren, dat met toename van leeftijd de resultaten beter worden. Typisch is, dat er duidelijk een groter verschil tussen de resultaten blijkt te bestaan, naarmate de leeftijden meer verschillen. De grootste verschillen liggen dan ook tussen de 3e en 4e en tussen de 4e en 5e klas.
Tot slot willen we nog een enkele opmerking maken over het redigeren van de oplossing van vraagstukjes.
Het blijkt voor de leerlingen erg moeilijk te zijn de oplossing op de juiste wijze te noteren.
Ieder, die deze oplossingen moet nakijken — en niet alleen naar

het antwoord kijkt! — weet, dat er vaak naast een gebrekkige formulering veel onzin geschreven wordt. Evers [1]) zegt: „Toegepast rekenen is het doorredeneren op relaties tussen kwantitatieve aspecten van de werkelijkheid, met gebruikmaking van parate kennis, automatismen en systematisch rekenen, *waarbij het kind zich beweegt van de taalwereld naar de getallenwereld en vervolgens weer van de getallenwereld naar de taalwereld*".
Om duidelijk te maken wat het bovenstaande betekent, halen we het volgende aan: „In het voorbeeld: 3 dagen achter elkaar won Jan 6 knikkers. Hoeveel heeft hij er gewonnen?" is sprake van de kwantitatieve gegevenheden: 3 dagen en 6 knikkers.
Daarnaast zijn er taal- resp. denkrelaties als achter elkaar, Jan, winnen."
En verder: „Het doorredeneren bestaat in het verdwijnen van de taalrelatie Jan, dagen, knikkers, enz. Er is dus sprake van abstraheren, van losmaken van kwaliteiten, van een overstap naar het abstracte, dus in genoemd voorbeeld: $3 \times 6 = 18$".
Wij zien dat het kind bij het lezen van de opgave verkeert in „de wereld van de taal" (waarin die taal door hem verstaan moet worden!). Wanneer hij de relaties doorzien heeft springt het sommetje 3×6 als het ware in zijn geest, dan denkt hij aan geen Jan, geen knikkers en geen dagen meer — dan verkeert hij in „de wereld van het getal" en geeft in die wereld het antwoord: 18. Daarna moet hij weer terugkeren naar de wereld van de taal om tot de conclusie te kunnen komen: „Jan heeft er 18 gewonnen".
We zien dus dat de wereld-van-de-taal en de wereld-van-het-getal bij het oplossen van een rekenprobleem twee verschillende werelden zijn. Dit heeft consequenties t.a.v. het redigeren van de oplossing, n.l. de oplossingen, eventueel deel-oplossingen,

[1]) De Kweekschool, okt. 1957, 32e jg. no. 9 blz. 276. Jonges zegt: „Rekenen is *doorredeneren* op het quantitatieve aspect van de werkelijkheid. 15 : 4 = staat volkomen naast de levensruimte, het is een „geval" in de wereld-van-het-getal. (Ped. Stud. 33e jg. 1956, blz. 356) (Zie ook nooit blz. 24).

werden onbenoemd als „naakte" getallen genoteerd. [1]) Terugkerend in de wereld van de taal noteert het kind wàt het telkens uitgerekend heeft. Wij lichten dit toe aan het volgende voorbeeld:
Een vierkant stuk land, waarvan de omtrek 180 m is wordt verkocht voor *f* 6,— per m². Hoeveel kost dit stuk land?

$180 : 4 = 45$	De zijde van het vierkant is 45 m.
$45 \times 45 = 2025$	De oppervlakte is 2025 m².
$6 \times 2025 = 12150$	Het stuk land kost *f* 12150,—

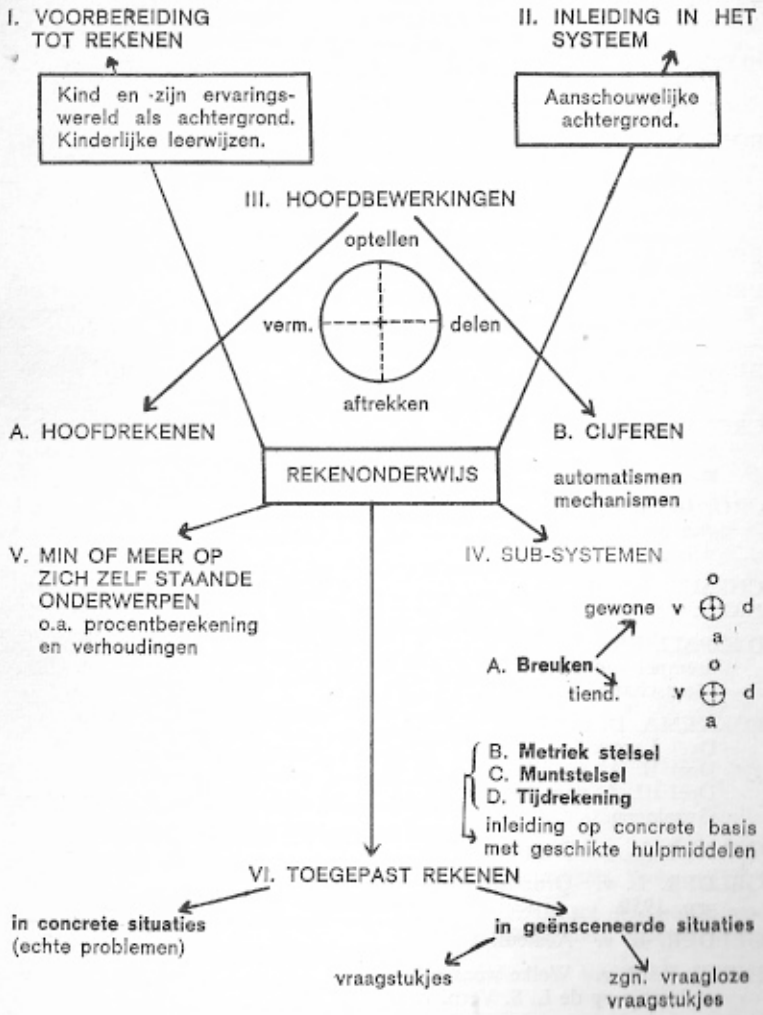
Inderdaad wordt hier voorkomen, dat er geschreven wordt *f* 6,— $\times$ 2025, in plaats van 2025 $\times$ *f* 6,— als consequentie van de redenering 1 m² kost *f* 6,—, dus . . . .
In de wereld van het getal is 6×2025 en 2025×6 hetzelfde, hoewel de betekenis in de wereld van de taal verschilt!
Verder vermijden we het probleem of men schrijven moet 45 m $\times$ 45 m = 2025 m² of 45×45 m² = 2025 m².
De leerling moet elke berekening verantwoorden — hij moet zich dus realiseren wat hij berekend heeft. Dit is heel belangrijk, want een dergelijke wijze van noteren geeft geheel de gedachtengang van de leerling weer, waardoor bij eventuele fouten gemakkelijk geconstateerd kan worden, waar het kind ontspoorde.
Wij menen dat deze werkwijze het denken stimuleert, daar er een ordenende tendens van uitgaat.

SLOT

Wij hopen in het voorgaande duidelijk te hebben gemaakt dat rekenonderwijs meer is dan de kinderen sommen te laten maken:

[1]) Wij verwijzen voor het oplossen van vraagstukjes in dit verband naar: Rekenlesschetsen en didactische aanwijzingen voor de lagere school, Ped. Centrum N.O.V., blz. 14/16.

we moeten de kinderen leren rekenen. Daartoe moet de leerkracht zijn didaktisch handelen telkens opnieuw doordenken. Hij moet dit doen samen en in overleg met zijn kollega's, omdat hij in zijn klas slechts een deel van dit onderwijs verzorgt.
Hij moet zich verantwoordelijk voelen voor de continuïteit in de rekendidaktiek van zijn school en zal zich dus moeten houden aan de gemaakte didaktische afspraken. Wij menen, dat het rekenonderwijs hiervan in hoge mate zal profiteren.

SCHEMATISCH OVERZICHT

Doel van het rekenonderwijs op de lagere school: Het kind zó in te leiden in het rekensysteem, dat met het verwerven van het systeem tevens zijn rekenfunctie optimaal ontwikkeld wordt, waardoor:
1e. de rekenkundige problemen, die zich voordoen in het dagelijks leven op bevredigende wijze opgelost kunnen worden.
2e. zo nodig een vruchtbare basis gevormd kan worden voor een eventueel te volgen vorm van voortgezet onderwijs.